Секция №1, устный

УДК 550.837

МЕТОДЫ ОЦЕНКИ ПРАКТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ГЕОЭЛЕКТРИКИ

Шимелевич М.И.

Российский государственный геологоразведочный университет
им. Серго Орджоникидзе МГРИ-РГГРУ, г. Москва, Россия

Аннотация: Предлагается алгоритм расчета модулей непрерывности. Приводятся примеры расчета априорных и апостериорных характеристик практической устойчивости обратных задач для типовых моделей сред, используемых в геоэлектрике.

Ключевые слова: обратная задача, геоэлектрика, априорные оценки, апостериорные оценки

1. В конечно-параметрических классах сред обратная задача геоэлектрики рассматривается на замкнутом ограниченном подмножестве конечномерного пространства, что создает предпосылки для ее корректной разрешимости. В этом случае, при определенных дополнительных условиях, обратная задача может рассматриваться как условно-корректная и быть теоретически устойчивой, но оставаться при этом плохо обусловленной, практической неустойчивой (неоднозначной), если детальность описания среды при ее параметризации не согласована с уровнем погрешности, объемом, типом и пространственной структурой используемых данных [1]. Для конечно-параметрических классов сред на основе анализа свойств прямого оператора задачи могут быть получены количественные априорные и апостериорные характеристики степени практической устойчивости решений обратных задач [10]. Эти оценки не зависят от применяемого алгоритма решения обратной задачи и позволяют сформулировать определенные требования к создаваемым моделям параметризации среды и построению устойчивых алгоритмов решения обратной задачи, а также объективно оценить погрешность и достоверность результатов практической интерпретации наблюденных геофизических данных.

2. Обратная задача электромагнитных зондирований в заданном *модельном конечно-параметрическом классе сред* сводится к решению операторного уравнения 1 рода относительно вектора $s=(s_1,...,s_N)$ параметров среды:

$$A_N s = e, \quad s \in S \subset R^N, \quad e \in R^M, \tag{1}$$

где $e=(e_1,...,e_M)$ – вектор данных, определяемый значениями характеристик ЭМ поля в точках фактической сети измерений τ на поверхности Земли, A_N - нелинейный оператор решения прямой задачи, отображающий векторы параметров среды $s=(s_1,...,s_N)$ в векторы данных $e=(e_1,...,e_M)$ и определенный на множестве $S \subset R^N$ допустимых значений параметров, R^N - конечномерное пространство размерности N. В качестве S обычно задается ограниченное замкнутое подмножество R^N:

$$S: \quad [s_n^{\min} \le s_n \le s_n^{\max}], \quad n=1,...,N. \tag{2}$$

При численном решении прямой задачи действие оператора A_N на вектор $s=(s_1,...,s_N)$ представляет собой суперпозицию преобразований F, A_{fin} вида:

$$A_N s = A_{fin}(F(s)) = A_{fin}(\sigma_F) = e, \tag{3}$$

где - F оператор параметризации [8], определяющий *в рассматриваемом классе сред* правило пересчета вектора s модельных параметров среды в вектор $\sigma_F = Fs$, который задает значения искомой функции уд. электропроводности $\sigma(x_i, y_j, z_k)$ на сетке $x_i, y_j, z_k \in \Omega$ прямой задачи в исследуемой области Ω, A_{fin} - конечноразностный оператор прямой краевой задачи.

Причиной практической неустойчивости обратной задачи (1) служат не только общие законы распространения и поглощения квазистационарного ЭМ поля в среде, но так же избыточная детальность ее параметризации, при которой изменения параметров, определяющих мелкие (или расположенные на большой глубине) детали строения среды не находят значимого отражения в ЭМ полях, наблюдаемых с некоторой погрешностью δ в точках фактической сети измерений τ.

Количественно степень практической устойчивости решения обратной задачи (1) определяется свойствами прямого оператора A_N и уровнем δ погрешности данных. Свойства оператора A_N, как следует из соотношения (3), зависят от свойств конечноразностного оператора A_{fin} прямой задачи, типа параметризации F (в частности, от числа N, определяющего детальность описания среды), и от свойств множества значений $E = A_N S$ оператора A_N, определяемых структурой фактической сети измерений τ, типом и объемом M используемых входных данных. Это позволяет на основе анализа свойств оператора A_N получить количественные оценки степени практической устойчивости решений задачи (1) в зависимости от указанных алгоритмических и технологических параметров задачи.

3. Пусть для заданной приближенной правой части $\tilde{e}$ уравнения (1) найдено некоторое приближенное решение $s_{\delta 1} \in S$ задачи (1) с приемлемой для практики невязкой синтеза, сопоставимой с предполагаемым уровнем погрешности в данных δ:

$$\left\| A_N s_{\delta 1} - \tilde{e} \right\|_{R^M} \le \delta, \tag{4}$$

где $\|\cdot\|_{R^M}$ - норма в пространстве данных R^M. Известно, что помимо найденного приближенного решения $s_{\delta 1}$, уравнению (1) может удовлетворять некоторое множество δ-эквивалентных решений [7]. Расстояние наиболее удаленного эквивалентного решения $s_{\delta \max}$ от найденного решения $s_{\delta 1}$ определяется величиной [2, 6]:

$$\beta_N(s_{\delta 1}, \tilde{e}, \delta) = \sup_{s_\delta \in S} \| \; s_\delta - s_{\delta 1} \; \|_{R^N}, \text{ при } \| \; A_N s_\delta - \tilde{e} \; \|_{R^M} \le \delta \tag{5}$$

Если $\beta_N(s_{\delta 1}, \tilde{e}, \delta) \to 0$, при $\delta \to 0$, то обратная задача является *теоретически устойчивой*. На практике невязка синтеза всегда отлична от нуля $\delta \ne 0$ и поэтому $\beta_N(s_{\delta 1}, \tilde{e}, \delta) > 0$. Значение $\beta_N(s_{\delta 1}, \tilde{e}, \delta)$ при фиксированном значении $\delta \ne 0$ является характеристикой *степени практической устойчивости (однозначности)* найденного приближенного решения $s_{\delta 1}$ обратной задачи (1) для *фиксированных входных данных* $\tilde{e}$. Если величина $\beta_N(s_{\delta 1}, \tilde{e}, \delta)$ мала (например, относительно нормы найденного приближенного решения $\| \; s_{\delta 1} \; \|_{R^N}$), то решение можно считать практически устойчивым для используемых при решении обратной задачи фиксированных входных данных $\tilde{e}$ и полученной невязки синтеза δ. Характеристика $\beta_N(s_{\delta 1}, \tilde{e}, \delta)$ позволяет оценить *апостериорную погрешность полученного приближенного решения* $s_{\delta 1}$ *задачи для фиксированных данных* $\tilde{e}$, т.к. определяет «разброс» возможных δ-эквивалентных решений s_δ относительно найденного $s_{\delta 1}$. Любое δ-эквивалентное решение s_δ не может отклоняться от найденного $s_{\delta 1}$ более чем на величину $\beta_N(s_{\delta 1}, \tilde{e}, \delta)$ [10]:

$$\| \; s_\delta - s_{\delta 1} \; \|_{R^N} \le \beta_N(s_{\delta 1}, \tilde{e}, 2\delta), \tag{6}$$

Характеристика *степени практической устойчивости* $\beta_N(s_{\delta 1}, \tilde{e}, \delta)$ зависит от конкретных используемых входных данных. Для практики представляет интерес получение *априорных оценок степени практической устойчивости* приближенных решений по всему множеству S допустимых решений обратной задачи (1), не связанных с конкретными данными и находимыми решениями. Такие оценки могут быть получены на основе анализа множества решений прямых задач для оператора A_N до непосредственного решения обратной задачи.

4. Зададимся некоторым точным значением вектора параметров среды s и решим для него прямую задачу $e(s) = A_N(s)$. Рассмотрим изменение решения $\Delta e = e(s+\Delta s) - e(s)$ прямой задачи, при произвольно заданном (не обязательно малом) изменении Δs вектора параметров среды:

$$A_N(s+\Delta s) - A_N(s) = \Delta e(s, \Delta s) . \quad (7)$$

Максимально возможное изменение параметров среды $\|\Delta s\|$ при изменении поля $\|\Delta e\| \le \delta$ (рассмотренное для всех $s \in S$) определяет степень устойчивости (однозначности) решений обратной задачи на множестве S для любых теоретических данных $e(s)$:

$$\beta_N(\delta) = \sup_{s,s' \in S} \| \ s' - s \ \|_{R^N} \ \ при \ \| \ A_N s' - A_N s \ \|_{R^M} \le \delta \quad (8)$$

В теории некорректных задач величина $\beta_N(\delta)$ используется в качестве характеристики степени устойчивости решений обратных задач и называется модулем непрерывности обратного оператора задачи (1) (точнее говоря, является одной из его разновидностей) [4, 5]. В работе [1] величину, обратную к $\beta_N(\delta)$, по аналогии с задачами оптики, предлагается называть разрешающей способностью рассматриваемого геофизического метода.

Наряду с характеристикой практической устойчивости $\beta_N(\delta)$, при исследовании решений обратных задач, важной является характеристика чувствительности поля к изменениям параметров среды:

$$\gamma_N(d) = \sup_{s,s' \in S} \| \ A_N s' - A_N s \ \|_{R^M} , \quad при \quad \| \ s' - s \ \|_{R^N} \le d \ , \quad (9)$$

которая определяет максимально возможные изменения поля в точках фактической сети наблюдений, при изменениях параметров среды не превышающих заданную величину d. Характеристика $\gamma_N(d)$ является модулем непрерывности прямого оператора A_N на множестве S. Изменения параметров среды $\|\Delta s\| \le d$, при которых $\gamma_N(d) \le \delta$ не будут отражаться в полях, наблюдаемых с точностью δ.

5. Одной из практических задач интерпретации является оценка степени практической однозначности определении геолого-геофизических параметров отдельной *типовой (целевой) структуры*, связанной с определенным типом полезных ископаемых, на фоне неизвестной (или слабо изученной) вмещающей среды с использованием ограниченных объемов данных [8, 9]. Для решения задач такого типа может быть использована оценка, являющаяся обобщением рассмотренной выше характеристики $\beta_N(\delta)$.

Рассмотрим соотношение (7) для случая, когда изменение вектора параметров происходит только для некоторой группы выделенных *анализируемых параметров* $s^a = (s_1^a, .., s_{N_a}^a) \in S^a$:

$$A_N(s+\Delta s^a) - A_N(s) = \Delta e(s, \Delta s^a) . \quad (10)$$

Величина $\beta_N^a(\delta)$, определяемая соотношением:

$$\beta_N^a(\delta) = \sup_{s,s'^a} \| \ s'^a - s \ \|_{R^{N_a}} \ , \quad при \quad \| \ A_N(s'^a) - A_N(s) \ \|_{R^M} \le \delta$$
$$s'^a = s + \Delta s^a, \quad \Delta s^a \in S^a, \quad s \in S \quad (11)$$

представляет собой априорную оценку степени практической устойчивости определения группы анализируемых параметров $s^a = (s_1^a, .., s_{N_a}^a)$ при любом заранее неизвестном строении вмещающей (фоновой) среды s и уровне погрешности δ данных, определенных на фактической сети измерений.

Аналогичные выражения могут быть получены для чувствительности $\gamma_N^a(d)$ используемых характеристик поля к изменению анализируемых параметров среды, не превышающих величину $\| \ \Delta s^a \ \|_{R^{N_a}} \le d_a$, при произвольном строении вмещающей среды.

6. В работах [1, 3] приводятся теоретические оценки характеристик $\gamma_N(d)$, $\beta_N(\delta)$ в линейном приближении при малых значениях $\|\Delta s\|$ с использованием норм прямого и обратного операторов линеаризованной задачи в окрестности некоторой заданной точки s_0. В данной работе рассматриваются методы расчета характеристик степени практической устойчивости решений обратной задачи $\beta_N(s_{\delta 1},\tilde{e},\delta)$, $\gamma_N(d)$, $\beta_N(\delta)$, $\gamma_N^a(d)$, $\beta_N^a(\delta)$ в общем случае нелинейного оператора A_N для любых (не обязательно малых) значений $\|\Delta s\|$. Последнее является важным, т.к. в случае практической неустойчивости задачи малым изменениям поля $\|\Delta e\| \le \delta$, могут соответствовать достаточно большие изменения параметров среды $\|\Delta s\|$, при которых условия линейного приближения могут не выполняться.

Расчет оценок величин $\beta_N(s_{\delta 1},\tilde{e},\delta)$, $\gamma_N(d)$, $\beta_N(\delta)$, $\gamma_N^a(d)$, $\beta_N^a(\delta)$ сводится к решению ряда соответствующих задач нелинейной условной оптимизации. Для их решения в данной работе применяется метод Монте-Карло.

Для модельных 2D, 3D данных приводятся примеры расчета оценок априорных и апостериорных характеристик степени практической устойчивости и их зависимостей от детальности параметризации среды, а также от уровня погрешности, структуры и объема входных данных для классов сред с блочной параметризацией.

7. Полученные в работе результаты позволяют сделать следующие выводы:

1) на основе оценок *априорных характеристик устойчивости* $\beta_N(\delta)$, $\beta_N^a(\delta)$ и *чувствительности* $\gamma_N(d)$, $\gamma_N^a(d)$, могут быть сформулированы определенные требования к создаваемым моделям параметризации среды (и ее детальности) при которых обратная задача является практически устойчивой. Эти требования формулируются с учетом типа и объема используемых входных данных, уровня их погрешности и предполагаемой структуры фактической сети наблюдений.

2) апостериорные оценки степени практической устойчивости (однозначности) $\beta_N(s_{\delta 1},\tilde{e},\delta)$ получаемых приближенных решений обратных задач позволяют объективно оценить погрешность и достоверность результатов практической интерпретации полевых данных (задача *верификации* результатов интерпретации геофизических данных).

Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке ГК № 14.740.11.0196 и гранта РФФИ 11-07-00662 .

Список литературы

1. Бердичевский М. Н., Дмитриев В. И. Об обратных задачах в геоэлектрике. Глава 8 в книге: Светов Б. С. Основы геоэлектрики, ЛКИ, 2008.
2. Гончарский А.В., Ягола А. Г. О равномерном приближении монотонных решений некорректных задач. Докл. АН СССР, 1969. 184, № 4.
3. Жданов М.С. Теория обратных задач и регуляризации в геофизике. М., Научный мир, 2007.
4. Иванов В.К. О некорректно поставленных задачах // Математический сборник, 1963, Т. 61(103) №2, с.211–223.
5. Лаврентьев М.М, Романов В.Г., Шишатский С.П. Некорректные задачи математической физики и анализа. М., Наука, 1980.
6. Новик О.Б. Математические вопросы сокращения числовой геофизической информации при поисках нефти и газа. Деп в ВИЭМС 02.11.87 №485-МГ.
7. Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г. Численные методы решения некорректных задач. М.: Наука. 1990.
8. Шимелевич М.И., Оборнев Е.А. Аппроксимационный метод решения обратной задачи МТЗ с использованием нейронных сетей // Физика Земли, 2009, 12.с.22-38.
9. Шимелевич М.И., Оборнев Е.А. Нейросетевая метод магнитотеллурического мониторинга геоэлектрических параметров среды на основе неполных данных // Вестник КРАУНЦ, Науки о Земле, №1, выпуск 11. 2008. С. 62-67.
10. Шимелевич М.И., Оборнев Е.А., Оборнев И.Е., Родионов Е.А. Численные методы оценки степени практической устойчивости обратных задач геоэлектрики // Физика Земли, 2013, №3, С. 58-64.