

АНАЛИЗ АЛГОРИТМОВ РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ КОЭФФИЦИЕНТНЫХ ЗАДАЧ ГЕОЭЛЕКТРИКИ НА ПОСТОЯННОМ ТОКЕ

Кутищева А.Ю.¹

¹ – Институт нефтегазовой геологии и геофизики им. А.А. Трофимука Сибирского отделения Российской академии наук (ИНГГ СО РАН), Новосибирск.

Реализованы и исследованы два типа алгоритмов решения обратных коэффициентных задач. Проведены вычислительные эксперименты для различного уровня зашумления данных измерений.

Ключевые слова: обратные коэффициентные задачи, некорректные обратные задачи, функционал Тихонова, метод Гаусса-Ньютона, метод Флетчера-Ривса.

Постановка задачи

В настоящее время при интерпретации данных георазведки (зондирования на постоянном токе) необходимо использовать специальные математические методы, которые позволяют работать с большими объемами данных. Существующие на сегодняшний день пакеты программ для решения трехмерных обратных задач (res3dinv, RESINVM3D) не позволяют изменять такой параметр, как регуляризирующий оператор, и предлагают ограниченный набор алгоритмов минимизации функционала, а так же не дают возможности контролировать решение прямых задач.

В данной работе предлагаются две модификации вычислительного алгоритма решения обратной коэффициентной задачи по восстановлению кусочно-постоянного коэффициента электропроводности, построенные на базе метода Гаусса-Ньютона и метода сопряженных направлений; анализируются эффективность алгоритмов на решении тестовых задач.

Будем рассматривать постановку обратной задачи в следующем виде:

$$A(m)U = f, \quad (1)$$

где $A(m)$ – оператор решения прямой задачи; U – вектор решения; f – правая часть; m – некоторая функция проводимости среды.

Модель наблюдения имеет вид:

$$b = Q[m] + \varepsilon, \quad (2)$$

где $Q[m]$ – оператор, проектирующий пространство решений на пространство датчиков; m – неизвестный вектор параметров; b – показания датчиков, ε – шум измерений. Шум измерений предполагается гауссовским.

Для решения обратных некорректных коэффициентных задач А.Н. Тихонов в 1963 году предложил метод, основанный на введении в функционал регуляризирующего оператора [1], который позволяет искать решение в классе с заданными свойствами.

Задачу поиска неизвестных параметров m сформулируем, как задачу минимизации с ограничениями [1]:

$$\phi(m, U) = \frac{1}{2} \|Q[m] - b\|^2 + \frac{\beta}{2} \|W(m - m_0)\|, \quad (3)$$

при условии $A(m)U = f$

где W – некоторый регуляризирующий оператор, m_0 – начальные значения вектора параметров, β – коэффициент регуляризации.

Будем предполагать, что для корректного решения обратной коэффициентной задачи (3) распределение скалярного потенциала U и неизвестный кусочно-постоянный коэффициент электропроводности m должны удовлетворять следующим требованиям:

- вычисленное поле U должно отличаться от данных измерений незначительно:

$$\phi_d = \|QU - b\|^2 \leq \gamma_1;$$

- функция штрафа на решении должна быть ограничена:

$$\phi_\beta = \|W(m - m_0)\|^2;$$

- определяемые значения коэффициента электропроводности и распределение скалярного потенциала U должны удовлетворять операторному уравнению (соответствующему прямой задаче):

$$A(m)U = f.$$

Соотношение (3) – это задача определения минимума функционала в слабой формулировке, где регуляризирующий параметр $\beta \geq 0$ интерпретируется как некоторая величина, обратная множителю Лагранжа. Рассмотрим формулировку (3), при которой решение U не обязательно некоторая явная функция неизвестных параметров m . В этом случае слабая постановка (3) может быть выписана с помощью множителей Лагранжа [3]:

$$L(U, m, \lambda) = \frac{1}{2} \|QU - b\|^2 + \frac{\beta}{2} \|W(m - m_0)\|^2 + \lambda^T [A(m)U - f], \quad (4)$$

где λ – вектор множителей Лагранжа.

Необходимые условия существования решения задачи (4):

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial U} &= Q^T (QU - b) + A^T \lambda = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial m} &= \beta W^T W (m - m_0) + G^T \lambda = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial p} &= AU - f = 0, \\ G &= \frac{\partial AU}{\partial m}. \end{aligned} \quad (5)$$

Метод Гаусса-Ньютона

Для решения нелинейной системы (5) воспользуемся методом Гаусса-Ньютона [2]. На каждой итерации метода необходимо вычисление приращений δm

$$\begin{aligned} &(\beta W^T W + G^T (A^{-1})^T Q^T Q A^{-1} G) \delta m = \\ &-\beta W^T W (m - m_0) - G^T (A^{-1})^T Q^T (b - Q A^{-1} f) \end{aligned} \quad (6)$$

Вычислительный алгоритм:

1. Задается начальное значение $m^{(0)}$.
2. Вычисляется $U^{(0)}(m^{(0)})$ как решение прямой задачи (1).
For $i=1, 2, \dots$ do
 - i.1. Вычисляется приращение δm по формуле (6).
 - i.2. Вычисляется $m^{(i+1)} = m^{(i)} + \delta m$.
 - i.3. Вычисляется $U^{(i+1)}(m^{(i+1)})$ как решение прямой задачи (1).
 - i.4. Проверка критерия останова.

Метод сопряженных направлений

Рассмотрим минимизацию функционала (3) методом сопряженных направлений [2].

Введем обозначения $-QA^{-1}G = K$.

Для вычисления приращений δm на каждой итерации метода требуется найти сопряженное направление $S^{(i)}$ и выполнить минимизацию в заданном направлении.

Запишем производную $\frac{\partial \phi(m, U)}{\partial m}$

$$\frac{\partial \phi(m, U)}{\partial m} = K^T (QA^{-1}f - b) + \beta W^T W (m - m_0). \quad (7)$$

Начальное направление $S^{(0)}$ берется равным $-\frac{\partial \phi(m, U)}{\partial m}$.

Коэффициент $\alpha^{(i)}$ определяющий минимизацию функционала (3) по направлению $S^{(i)}$ может быть найден из соотношения $\frac{\partial \phi(m + \alpha S, U)}{\partial S} = 0$ и для функционала (3) имеет вид:

$$\alpha^{(i)} = \frac{(QA^{-1}f - b, KS^{(i)}) + \beta (W(m - m_0), WS^{(i)})}{(KS^{(i)}, KS^{(i)}) + \beta (WS^{(i)}, WS^{(i)})}. \quad (8)$$

Следующее сопряженное направление $S^{(i+1)}$ вычисляется по формуле

$$S^{(i+1)} = -\frac{\partial \phi(m^{(i+1)}, U)}{\partial m} + \frac{\left\| \frac{\partial \phi(m^{(i)}, U)}{\partial m} \right\|^2}{\left\| \frac{\partial \phi(m^{(i-1)}, U)}{\partial m} \right\|^2} S^{(i)}. \quad (9)$$

Вычислительный алгоритм:

1. Задается начальное значение $m^{(0)}$.
2. Вычисляется $S^{(0)} = -\frac{\partial \phi(m, U)}{\partial m}$.

For $i=1, 2, \dots$ do

- i.1. Вычисляется направление $\alpha^{(i+1)}$ по формуле (8).
- i.2. Вычисляется $m^{(i+1)} = m^{(i)} + \alpha^{(i)} S^{(i)}$.
- i.3. Вычисляется $S^{(i+1)}$ по формуле (9).

- i.4. Проверка критерия останова $\left\| \frac{\partial \phi(m^{(i+1)}, U)}{\partial m} \right\|^2 < \varepsilon$.

Результаты вычислительных экспериментов

Рассмотрим модельную задачу на области $\Omega = [0, 2000] \times [0, 2000] \times [0, 2000]$ (м) (рис 1). В качестве источника были взяты два цилиндра с высотой $l = 0.1$ м и радиусом $r = 0.01$ м. Между электродами расстояние 1000 (м).

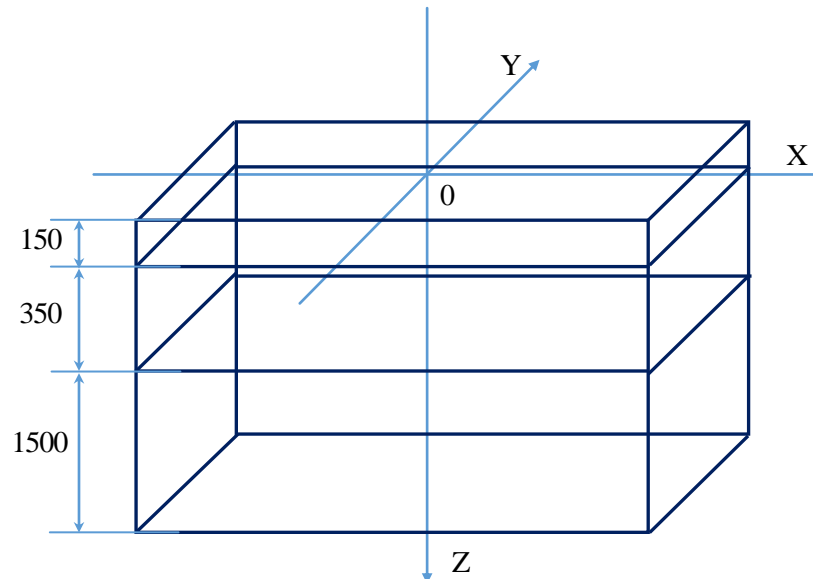


Рис. 1. Область моделирования

Значения сопротивлений для данного теста равны

$$\rho = \begin{cases} 1(\text{Ом} \cdot \text{м}), & -150 < z \leq 0 \\ 100(\text{Ом} \cdot \text{м}), & -500 < z \leq -150 \\ 1(\text{Ом} \cdot \text{м}), & z < -500 \end{cases}$$

В качестве неизвестного возьмём сопротивление второго слоя ($-500 < z \leq -150$).

Таблица 1. Результаты решения обратной задачи в зависимости от начального приближения

Величина шума, %	Начальное приближение (Ом*м)	Количество итераций	Полученное сопротивление (Ом*м)	Среднеквадратическое отклонение
0%	1000	3	91.57509	8,42491
0%	10	Не сошелся	-	-
0%	10000	2	99.70089	0,29911

Литература

1. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. – М.: Наука – 1979 – 288 с.
2. Haber E., Ascher U.M., Oldenburg D. On optimization techniques for solving nonlinear inverse problems. // Inverse Problems -2000. – V.16, № 5. – p. 1263-1280.