Секция №1, устный

УДК 519.642.7

МЕТОД ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЗАДАЧАХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ЗОНДИРОВАНИЯ ВЫСОКОКОНТРАСТНЫХ СРЕД

Дмитриев В.И., Кругляков М.С.

МГУ им. Ломоносова

Моделирование электромагнитного зондирования высоко-контрастных (с контрастом более чем в 1000 раз) сред до сих пор является сложной вычислительной задачей. Это связано с тем, что независимо от выбранного способа численного решения задачи: конечные разности, конечные элементы или интегральные уравнения, число обусловленности полученной матрицы системы линейных уравнений растет вместе с контрастностью. Поэтому, даже те методы, для которых была доказана теоретическая сходимость для произвольной конечной контрастности, на практике сходятся весьма медленно.

В настоящей работе предложен новый численный метод решения интегральных уравнений, который представляется весьма перспективным для моделирования зондирования контрастных сред. Основное отличие предлагаемого метода от аналогичных заключается в двукратном интегрировании электрического тензора Грина в ходе алгебраизации исходного интегрального уравнения. Это дополнительное «усреднение» уравнения позволило избавиться от необходимости вычислять сингулярные интегралы и, как показали вычислительные эксперименты, добиться высокой скорости сходимости итерационного процесса решения системы линейных уравнений. Так для модели COMMEMI-3D3, контраст в которой достигает 33000, удалось добиться относительной невязки решения СЛАУ меньшей 10^{-6} всего за 400 итераций, при разбиении аномалии на 1.8 млн ячеек. Это не удивительно, поскольку число обусловленности получающихся СЛАУ, хоть и растет с увеличением контрастности, но никогда не превосходит её.

Для предлагаемого метода доказана сходимость и проведена оценка погрешности, как для решения интегрального уравнения, так и для компонент электромагнитного поля, вычисляемых по приближенным формулам пересчета.

Ключевые слова: интегральные уравнения электродинамики, вычислительные методы, высоко-контрастные среды

Типичной моделью, используемой в задачах геофизической электродинамики, является горизонтально-однородная (слоистая) среда с проводимостью $\sigma(z)$, содержащая аномалию T, проводимость которой $\sigma(x,y,z)$ отлична от проводимости окружающей среды. При этом основной практический интерес представляет электромагнитное поле в точках, расположенных на достаточно большом расстоянии от аномалии. Такой класс задач удобно решать с помощью перехода от дифференциальных уравнений Максвелла к интегральным уравнениям, используя фундаментальную функцию Грина для слоистой среды.

Если для данной слоистой среды известны электрический G_E и магнитный G_H тензоры Грина, то полное электромагнитное поле $\vec{E}$, $\vec{H}$, в произвольной точке M представимо в следующем виде:

$$\vec{E}(M)=\int_T G_E(M,M_0)\Delta_\sigma(M_0)\vec{E}(M_0)dT_{M_0}+\vec{E}^0(M),$$

$$\vec{H}(M)=\int_T G_H(M,M_0)\Delta_\sigma(M_0)\vec{E}(M_0)dT_{M_0}+\vec{H}^0(M), \tag{1}$$

где $\Delta_\sigma=\sigma_a-\sigma$, $\vec{E}^0$ и $\vec{H}^0$ — первичное поле, т.е. поле, наведенное данными источниками в слоистой среде, не содержащей аномалию.

Если точка $M \in V$, то первое выражение в (1) является сингулярным уравнением относительно полного электрического поля $\vec{E}$.

$$\vec{E}(M) - \int\limits_T G_E(M,M_0)\varDelta_\sigma(M_0)\vec{E}(M_0)dT_{M_0} = \vec{E}^0(M) \tag{2}$$

Если решение этого уравнения известно, т.е. поле $\vec{E}$ известно внутри области T, то для вычисления электромагнитного поля в любой точке пространства используются формулы (3), которые называются формулами пересчета.

В задачах геофизики, как правило, основной интерес представляет не решение интегрального уравнения (2) внутри аномалии, а поле, полученное по формуле пересчета (1). Разобьем область T на N непересекающихся выпуклых подобластей T_k, $k = 1\ldots N$. Представим интегралы из формул (1) в виде суммы интегралов по совокупности подобластей, составляющих аномалию:

$$\begin{gathered}\vec{E}(M) = \sum_{k=1}^{N}\int\limits_{T_k} G_E(M,M_0)\varDelta_\sigma(M_0)\vec{E}(M_0)dT_{M_0} + \vec{E}^0(M),\\ \vec{H}(M) = \sum_{k=1}^{N}\int\limits_{T_k} G_H(M,M_0)\varDelta_\sigma(M_0)\vec{E}(M_0)dT_{M_0} + \vec{H}^0(M).\end{gathered} \tag{3}$$

Если расстояние между подобластью T_n и точкой наблюдения M велико по сравнению с диаметром d_n этой подобласти, то в формуле пересчета (3) можно вынести тензор Грина из-под интегрирования и получить зависимость не от поля в каждой точке аномалии, а от интеграла от электрического поля, взятого по соответствующей подобласти $\int\limits_{T_n}\vec{E}(M)dT_M$:

$$\begin{gathered}\vec{E}(M) = \sum_{k=1}^{N} G_E\left(M,M_0^k\right)\varDelta_\sigma\left(M_0^k\right)\int\limits_{T_k}\vec{E}(M_0)dT_{M_0} + \vec{E}^0(M),\\ \vec{H}(M) = \sum_{k=1}^{N} G_H\left(M,M_0^k\right)\varDelta_\sigma\left(M_0^k\right)\int\limits_{T_k}\vec{E}(M_0)dT_{M_0} + \vec{H}^0(M).\end{gathered} \tag{4}$$

Именно на определении таких интегралов по подобластям и основывается предлагаемый метод. Представим уравнение (2) в виде уравнения по совокупности подобластей:

$$\vec{E}(M) - \sum_{k=1}^{N}\int\limits_{T_k} G_E(M,M_0)\varDelta_\sigma(M_0)\vec{E}(M_0)dT_{M_0} = \vec{E}^0(M) \tag{5}$$

Проинтегрируем уравнение (5) по каждой из областей T_n и поделим на объем $V_n = \int\limits_{T_n} dT_M$ соответствующей области. Получим систему из N интегральных соотношений:

$$\overrightarrow{E_n} - \frac{1}{V_n}\sum_{k=1}^{N}\int\limits_{T_k}\left\{\int\limits_{T_n} G_E(M,M_0)dT_M\right\}\varDelta_\sigma(M_0)\vec{E}(M_0)dT_{M_0} = \vec{E}_n^0, \tag{6}$$

где

$$V_n = \int_{T_n} dT_M ,$$

$$\vec{E}_n = \frac{1}{V_n} \int_{T_n} \vec{E}(M) dT_M , \qquad (7)$$

$$\vec{E}^0_n = \frac{1}{V_n} \int_{T_n} \vec{E}^0(M) dT_M ,$$

$$n = 1 \ldots N;$$

Для перехода от системы интегральных соотношений (6) к системе линейных алгебраических уравнений, заменим в подынтегральном выражении по каждой подобласти функцию $\vec{E}(M)$ на её интегральное среднее $\frac{1}{V_n} \int_{T_n} \vec{E}(M) dT_M$. Получим следующую систему линейных уравнений, относительно *приближенных* интегральных средних $\vec{U}^n$:

$$\vec{U}^n - \sum_{k=1}^{N} K_n^k \vec{U}^k = \vec{E}^0_{n.} , \qquad (8)$$

где

$$K_n^k = \frac{1}{V_n} \int_{T_n} \int_{T_k} G_E(M, M_0) \varDelta_\sigma(M_0) dT_M dT_{M_0} . \qquad (91)$$

Как уже отмечалось, уравнения в (2) являются сингулярными, поскольку их ядра содержат сильную особенность, вызванную двукратным дифференцированием тензора Грина. В тоже время двойные интегралы из определения (9) коэффициентов являются абсолютно сходящимися, что существенно упрощает задачу их вычисления с высокой точностью.

Если система (8) совместна, то формулы пересчета (1) для электрического и магнитного поля аппроксимируются как :

$$\tilde{\vec{E}}(M) = \sum_{n=1}^{N} K_n^E(M) \vec{U}^n + \vec{E}^0(M),$$

$$\tilde{\vec{H}}(M) = \sum_{n=1}^{N} K_n^H(M) \vec{U}^n + \vec{H}^0(M), \qquad (2)$$

где

$$K_n^E(M) = \int_{T_n} G_E(M, M_0) \varDelta_\sigma(M_0) dT_{M_0} ,$$

$$K_n^H(M) = \int_{T_n} G_H(M, M_0) \varDelta_\sigma(M_0) dT_{M_0} . \qquad (11)$$

Таким образом, предлагаемый метод решения задачи (1)-(2) заключается в решении системы линейных уравнений (8) и подстановки её решения в формулы (10), что позволяет вычислять электромагнитное поле в любой точке пространства.

Для данного метода доказаны следующие теоремы:

Теорема 1. *Пусть* $\overrightarrow{E^0}(M)$ *— гладкая функция,* σ, σ_a *— вещественные гладкие функции,* $\infty > \sigma > 0, \infty > \sigma_a > 0$ *во всех точках области* T*. Тогда для любого разбиения на выпуклые непересекающиеся подобласти* T_k*,* $k = 1 \ldots N$ *решение системы (8) существует и единственно, и функции* $\vec{\tilde{E}}(M)$ *и* $\vec{\tilde{H}}(M)$ *приближают функций* $\vec{E}(M)$ *и* $\vec{E}(M)$ *с первым порядком по диаметру разбиения* $d = \max d_k$ $k = 1 \ldots N$ *в смысле нормы* $\overrightarrow{L_2}[T]$ *внутри области* T *и с первым порядком поточечно вне области* T*.*

Теорема 2. *Пусть* $\overrightarrow{E^0}(M)$ *— функция интегрируемая с квадратом,* σ, σ_a *— вещественные функции, интегрируемые с квадратом,* $\infty > \sigma > 0, \infty > \sigma_a > 0$ *во всех точках области* T*. Тогда для любого разбиения на выпуклые непересекающиеся подобласти* T_k*,* $k = 1 \ldots N$ *решение системы (8) существует и единственно, причем число обусловленности системы (8) не превосходит* $\dfrac{\max(\sigma, \sigma_a)}{\min(\sigma, \sigma_a)}$.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия Теоремы 2, тогда при стремлении диаметра разбиения к нулю, функции* $\vec{\tilde{E}}(M)$ *и* $\vec{\tilde{H}}(M)$ *сходятся к функциям* $\vec{E}(M)$ *и* $\vec{H}(M)$ *в смысле нормы* $\overrightarrow{L_2}[T]$ *внутри области* T *и поточечно вне области* T*.*

Данный метод был программно реализован и оттестирован на различных контрастных задачах. В качестве базовой тестовой модели была выбрана COMMEMI-3D3, как одна из наиболее вычислительно сложных известных моделей. Хотя контраст в данной модели и достигает 33000, вычислительные эксперименты показали хорошую сходимость итерационного метода решения СЛАУ.

Интересно, что при увеличении числа разбиений, т. е. порядка матрицы, число итераций требуемых для достижения заданной точности растет очень медленно: при увеличении порядка матрицы в 32 раза, число итераций выросло менее чем в 2 раза. Этот результат хорошо согласуется с результатом теоремы 2, о том, что обусловленность матрицы (8), а значит и, в каком-то смысле, скорость сходимости итерационного процесса, слабо зависит от числа уравнений.

Полученные результаты сходимости позволяют предложить данный метод для решения реальных прямых высококонтрастных задач и в качестве основы для последующего решения обратных задач.