Секция №1, устный

УДК 519.63

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ГЕОЭЛЕКТРИКИ В НЕОДНОРОДНЫХ 3D ОБЛАСТЯХ С РЕЛЬЕФОМ

Иванов М.И.[1], Кремер И.А.[1]

[1] – Институт нефтегазовой геологии и геофизики им. А.А. Трофимука СО РАН, Новосибирск, kremer@aoritm.com

Аннотация

В работе рассматриваются возможности численного моделирования электромагнитных полей в неоднородных 3D средах с рельефом. Для источников поля, представляющих набор заземленных электрических линий, реализован алгоритм аддитивного выделения особенностей решения в малых окрестностях источников. Обсуждаются численные аспекты применения данного алгоритма.

Ключевые слова: уравнения Максвелла, выделение особенностей решения.

В работе рассматриваются вопросы решения квазистационарной системы уравнений Максвелла в неоднородных по электромагнитным свойствах 3D средах Ω во временной области. Система уравнений записывается в терминах векторного магнитного потенциала $\boldsymbol{A}$

$$\begin{cases} rot\,\frac{1}{\mu}rot\,\boldsymbol{A}+\sigma\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}=-\sigma\nabla U+\boldsymbol{J}^s, \\ div\,\sigma\boldsymbol{A}=0. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь μ – магнитная проницаемость, σ – относительная электрическая проводимость, $\boldsymbol{J}^s$ – плотность тока в источнике, U – скалярный электрический потенциал, удовлетворяющий в Ω уравнению

$$-div\,\sigma\nabla U=-div\,\boldsymbol{J}^s.$$

На границах раздела сред Г с различными электромагнитными свойствами выполняются условия сопряжения

$$[\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{A}]_\Gamma=\boldsymbol{0},\quad \left[\boldsymbol{n}\times\frac{1}{\mu}rot\,\boldsymbol{A}\right]_\Gamma=\boldsymbol{0},\quad [\sigma\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}]_\Gamma=0, \quad (2)$$

$\boldsymbol{n}$ – вектор нормали к границе раздела сред Г, а квадратные скобки обозначают скачок соответствующей величины на этой границе. На внешней границе расчетной области выполняются однородные условия для касательной компоненты векторного потенциала

$$\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{A}|_{\partial\Omega}=\boldsymbol{0}. \quad (3)$$

Система уравнений (1) - (3) дополняется начальными условиями

$$\boldsymbol{A}|_{t=0}=\boldsymbol{A}_0 \quad (4)$$

Функция $\boldsymbol{A}_0$ удовлетворяет условиям (2) - (3) и стационарной системе уравнений

$$\begin{cases} rot\,\frac{1}{\mu}rot\,\boldsymbol{A}_0=(-\sigma\nabla U+\boldsymbol{J}^s)|_{t=0}, \\ div\,\sigma\boldsymbol{A}_0=0. \end{cases} \quad (5)$$

Если в качестве источника электромагнитного поля $\boldsymbol{J}^s$ используются различные комбинации заземленных электрических линий, то в решении появляются особенности, связанные с огромной разницей между размерами расчетной области и поперечными размерами источника. Данную ситуацию следует учитывать при построении численных схем. Один из способов такого учета заключается в том, что из расчетной области выделяется некоторая горизонтально-слоистая среда с известным аналитическим решением $\boldsymbol{A}^p$, содержащим особенность. Затем, общее решение задачи представляется в виде суммы первичного поля $\boldsymbol{A}^p$ и регулярного остатка $\boldsymbol{u}$, который определяется численным способом

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^p+\boldsymbol{u}. \quad (6)$$

При этом, функция $\boldsymbol{A}^p$ имеет глобальный характер, поскольку определена в каждой точке расчетной области. Недостатки такого подхода проявляются в ситуациях, когда невозможно выделить горизонтально-слоистую среду. Например, если на дневной поверхности требуется учитывать рельеф, или в случае, если источник расположен над средами с различными электромагнитными свойствами.

В представленной работе предложен альтернативный способ выделения особенности решения. Мы предполагаем, что источник поля (линия AB) присутствует только в начальный момент времени, поэтому дальнейшие рассмотрения производятся для стационарной системы уравнений (5). Основная идея метода состоит в том, что особенность решения $\boldsymbol{A}^p$ можно выделить локально – только в малой d - окрестности источника $B_{AB}(d), d \ll 1$ (Рис. 1.).

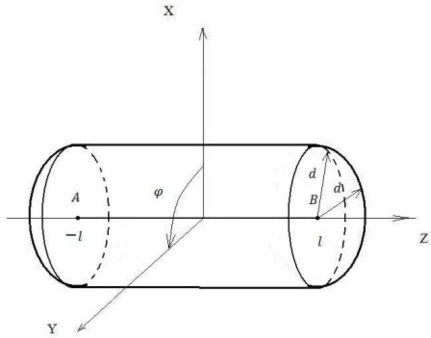

Рис. 1. Окрестность линии AB.

С этой целью, формируется отдельная задача в окрестности источника $B_{AB}(d)$

$$\begin{cases} rot\dfrac{1}{\mu}rot\,\boldsymbol{A}^p = -\sigma\nabla U + \boldsymbol{J}^s, \\ div\,\sigma\boldsymbol{A}^p = 0, \end{cases} \quad (7)$$

с однородными краевыми условиями на границах окрестности

$$\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{A}^p|_{\partial B_{AB}(d)} = \boldsymbol{0}. \quad (8)$$

Задача решается аналитическим способом, с использованием закона Био-Савара-Лапласа. Краевое условие (8) позволяет продолжить функцию $\boldsymbol{A}^p$ нулем на оставшуюся часть расчетной области. В этом случае, общее решение так же представляется в виде (6) и из условий (2) для функции $\boldsymbol{u}$ возникают неоднородные условия сопряжения на границе окрестности

$$\left[\boldsymbol{n}\times\frac{1}{\mu}rot\,\boldsymbol{u}\right]_{\partial B_{AB}(d)} = -\boldsymbol{n}\times\frac{1}{\mu}rot\,\boldsymbol{A}^p, \quad [\sigma\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}]_{\partial B_{AB}(d)} = -\sigma\boldsymbol{A}^p\cdot\boldsymbol{n}, \quad (9)$$

которые учитываются в постановке задачи для $\boldsymbol{u}$ в области Ω

$$\begin{cases} rot\dfrac{1}{\mu}rot\,\boldsymbol{u} = -\sigma\nabla U + \boldsymbol{J}^s, \\ div\,\sigma\boldsymbol{u} = 0. \end{cases} \quad (10)$$

Для численного решения задачи (10), (9) с условиями (2), (6) используется векторный метод конечных элементов на сетке, составленной из тетраэдров [1]. Граница окрестности $\partial B_{AB}(d)$ может пересекать тетраэдры, образующие сетку области. Формирование правой части для функции $\boldsymbol{u}$ осуществляется численным способом с использованием поверхностных квадратурных формул. В докладе представлены результаты тестирования алгоритма. Для модельной задачи в однородном полупространстве с известным аналитическим решением, исследовалась точность численного решения в зависимости от значений шага сетки около источника h и параметра d. Как показали численные эксперименты, зависимость решения от параметра d слабая, в то время как параметр h существенно влияет на точность численного решения.

В сложных ситуациях, когда источник располагается над средами с различными электромагнитными свойствами, и когда на дневной поверхности требуется учитывать рельеф, используется разбиение линии на элементарные прямолинейные участки над однородными средами. Вычисления на элементарных участках производятся по описанному выше алгоритму. В концах элементарных линий допускаются среды с различными электромагнитными свойствами.

1. Иванов М.И., Катешов В.А., Кремер И.А., Эпов М.И., Программное обеспечение модем 3D для интерпретации данных нестационарных зондирований с учетом эффектов вызванной поляризации //Записки Горного института – 2009. – Т. 183. – С. 242 – 245.