

## ВОЗМОЖНОСТИ ОПТИМИЗАЦИИ ВЫЧИСЛЕНИЙ ПРИ РЕШЕНИИ ТРЕХМЕРНЫХ ПРЯМЫХ И ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ГЕОЭЛЕКТРИКИ

Егоров И.В.

Институт океанологии им. П.П.Ширшова РАН, Москва

Представлены основные способы оптимизации вычислительных процессов при решении прямых и обратных задач геоэлектрики в развиваемой автором методике [1], основанной на применении метода конечных элементов и метода Треффца. Для дискретизации области решения и распределения параметров среды использованы элементы в виде однородных параллелепипедов. Описана методика задания условий на границе области решения, позволяющая минимизировать сетку дискретизации. Для решения прямых задач на участке, граничащем с воздухом, задание согласованных граничных значений осуществляется посредством аналога альтернирующего метода Шварца. Для решения линейной системы использована модификация итерационного метода Качмажа. Для ускорения итерационного процесса, проекции производятся на пересечениях гиперплоскостей. Для улучшения матрицы линейной системы использован циклический метод уравнивания. Для главного ускорения сходимости итерационного процесса применена оптимизация выбора направлений проекций путем уменьшения размерности, на основе известной леммы Джонсона-Линденштраусса. При решении обратной задачи, т.е. – определении значений параметров среды в каждом элементе, послойно минимизируется соответствующий функционал так, что задача сводится к последовательному решению некоторой прямой задачи в соответствующем слое. Для минимизации использован метод Хука и Дживса.

*Ключевые слова:* оптимизация вычислений, метод конечных элементов, метод Треффца, граничные условия, метод Шварца, модификация метода Качмажа, лемма Джонсона-Линденштраусса, минимизация функционала, метод Хука и Дживса.

Решение трехмерных прямых и обратных задач рассмотрено для модели трехмерной изотропной среды с ограниченной неоднородностью в пределах области решения. Распределение параметров среды представляется обобщенной плоскострой моделью среды с неоднородными слоями, что позволяет описывать любые трехмерные или двумерные неоднородности. Внутри области решения отсутствуют источники поля. Уравнения Максвелла для электромагнитного поля, гармонически меняющегося во времени как  $e^{-i\omega t}$ , в каждом элементе (прямоугольном параллелепипеде, в простейшем варианте) являются однородными и записываются в виде

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{H} &= (\sigma - i\omega\varepsilon)\mathbf{E}, \\ \nabla \times \mathbf{E} &= i\omega\mu \mathbf{H}.\end{aligned}\tag{1}$$

Решение системы (1) сводится к решению системы, состоящей из уравнения Гельмгольца и условия равенства нулю дивергенции внутри каждого элемента

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} &= \mathbf{0}, \\ \nabla \cdot \mathbf{E} &= \mathbf{0},\end{aligned}\tag{2}$$

где

$$k^2 = i\omega\mu(\sigma - i\omega\varepsilon),$$

электропроводность  $\sigma > 0$  при  $z \geq 0$  и  $\sigma = 0$  при  $z < 0$ ,  $\varepsilon, \mu$  – диэлектрическая и магнитная проницаемости соответственно (предполагается, что выполнены условия, при которых их значения совпадают со значениями в вакууме, хотя в общем случае они могут быть переменными). Магнитное поле определяется из второго равенства системы (1) по найденному электрическому полю из системы (2).

При использовании декомпозиционного подхода [2], на базе конечно-элементной методики в сочетании с методом Треффца, построены алгоритмы решения прямых и обратных задач геоэлектрики в частотной области. Для представления поля в каждом элементе используются частные решения уравнения Гельмгольца

$$e^{\pm ikx} \left( a_1^{(\pm)} yz + a_2^{(\pm)} y + a_3^{(\pm)} z + a_4^{(\pm)} \right) + e^{\pm iky} \left( b_1^{(\pm)} xz + b_2^{(\pm)} x + b_3^{(\pm)} z + b_4^{(\pm)} \right) + e^{\pm ikz} \left( c_1^{(\pm)} xy + c_2^{(\pm)} x + c_3^{(\pm)} y + c_4^{(\pm)} \right).$$

При выполнении граничных условий непрерывности касательных компонент электрического и магнитного полей в центре каждой грани элемента или - в среднем по площади грани получаем представления с 12 неизвестными коэффициентами в каждом внутреннем элементе. Используя в каждом элементе соответствующую систему локальных координат  $\tilde{x}$ ,  $\tilde{y}$ ,  $\tilde{z}$ , связанных линейно с глобальными координатами  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , получаем представление для компонент электрического и магнитного полей в каждом элементе:

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{\tilde{x}} &= \tilde{a}_1 e^{iky} + \tilde{a}_2 e^{-iky} + \tilde{a}_3 e^{ikz} + \tilde{a}_4 e^{-ikz}, \\ \tilde{E}_{\tilde{y}} &= \tilde{a}_5 e^{ikx} + \tilde{a}_6 e^{-ikx} + \tilde{a}_7 e^{ikz} + \tilde{a}_8 e^{-ikz}, \\ \tilde{E}_{\tilde{z}} &= \tilde{a}_9 e^{ikx} + \tilde{a}_{10} e^{-ikx} + \tilde{a}_{11} e^{iky} + \tilde{a}_{12} e^{-iky}, \end{aligned}$$

Компоненты магнитного поля определяются из второго соотношения системы (1) и данного представления.

Дискретизация осуществляется разбиением области решения на внутренние и граничные элементы, которые можно назвать открытыми или бесконечными. На гранях внутренних элементов выполняются условия непрерывности касательных компонент электрического и магнитного поля. Полагая, что вне области неоднородности среда представляет собой плоскостойкую модель с однородными слоями, бесконечные элементы, простирающиеся вовне области решения не имеют внешней границы, и потому в них должны выполняться условия ограниченности поля на бесконечности в проводящей части области решения (при  $z \geq 0$ ). Это реализуется обнулением соответствующих коэффициентов в представлении для поля в этих элементах. Важно заметить, что эти условия являются необходимыми и выполняются при любых источниках поля (вне области решения) для прямых и обратных задач. В воздухе такие условия не выполняются, т.к.  $\sigma = 0$ , однако можно так же избавиться от задания граничных значений на боковых границах области решения, используя бесконечные элементы в соответствующем направлении. В этом случае для определения всех коэффициентов представления поля в элементе можно задать два дополнительных условия, например, непрерывности нормальных компонент электрического и магнитного поля, на границе каждого такого элемента, общей со смежным внутренним элементом.

При решении прямой задачи для минимизации количества элементов в воздухе (при  $z < 0$ ) использованы открытые вверх бесконечные элементы с виртуальными граничными значениями на некотором уровне  $z=z_0$  как на верхней границе области решения. В случае магнитотеллурики, в качестве исходных значений берутся касательные компоненты суммы падающей и отраженной плоских волн для однородной плоскостойкой модели. С этими исходными граничными значениями решается прямая задача с заданным распределением электропроводности при  $z > 0$ . На следующем шаге процесса решения, используя найденные касательные компоненты электрического и магнитного полей на границе  $z=0$ , решается задача аналитического продолжения поля в воздухе (с соблюдением определенных мер устойчивости) и получают скорректированные значения на границе, которые берутся в качестве новых условий для решения прямой задачи. Эти процедуры проделываются до установления процесса согласования. Таким способом после нескольких шагов могут быть получены автоматически неизвестные изначально с достаточной точностью граничные значения для решения прямой задачи. При этом в воздухе для сетки достаточно одного шага по  $z$ .

Из формы представления поля и граничных условий получается линейная разреженная система (в каждой строке матрицы системы содержится не более 8 ненулевых элементов) для расчета коэффициентов представления поля во всех элементах. Для решения этой системы использован модифицированный итерационный метод Качмажа с предварительным улучшением матрицы посредством циклического метода уравнивания [1]:

$$\mathbf{X}_{j+1} = \mathbf{X}_j + (C_{j+1} - \mathbf{A}_{j+1} \cdot \mathbf{X}_j) [\mathbf{A}_{j+1}^* - (\mathbf{A}_j \cdot \mathbf{A}_{j+1}^*) \mathbf{A}_j^*] / \left( 1 - |\mathbf{A}_j \cdot \mathbf{A}_{j+1}^*|^2 \right),$$

где  $\mathbf{X}_p$  – вектор-столбец приближенного решения после  $p$  итераций;  $C_q$  – компонента с номером  $q$  вектора-столбца правой части линейной системы;  $\mathbf{A}_q$  – вектор-строка с номером  $q$  матрицы  $\mathbf{A}$ ;  $\mathbf{A}_q^*$  – вектор-столбец с номером  $q$ , полученный из вектора-строки  $\mathbf{A}_q$  после замены его элементов на комплексно сопряженные и операции транспонирования;  $|\mathbf{A}_q|=1$  для всех  $q=1,2,\dots,n$ ; значения  $\Delta=1-|\mathbf{A}_j \cdot \mathbf{A}_{j+1}^*|^2 \neq 0$  берутся те, при которых происходит устойчивый итерационный процесс;  $j=1, 2, \dots, n$  (когда  $j=n$  величины  $C_{j+1}, \mathbf{A}_{j+1}, \mathbf{A}_{j+1}^*$  соответственно заменяются на  $C_1, \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_1^*$ ).

Важно отметить, что предложенная в 1937 г. польским математиком Качмажем идея решения линейных систем получила развитие за прошедшее время в различных модификациях этого итерационного метода [3,4,6], которые продолжают появляться и в настоящее время, что говорит о возможностях дальнейшего развития его при сочетании с другими математическими средствами. В этом плане представляется перспективным применение метода уменьшения размерности, получившего теоретическое обоснование после публикации известной леммы Джонсона-Линденштраусса [5]. Такой подход был недавно представлен в некоторых публикациях (например, [6]).

В программах моделирования, которые имеются в виду в настоящем докладе, автором реализован подход, основанный на уменьшении размерности, путем оптимального отбора проекций на соответствующие гиперплоскости в итерационном процессе решения линейной системы, что приводит к значительному сокращению излишних вычислений и значительно ускоряет процесс сходимости.

Оптимизация при решении трехмерной обратной задачи, в которой исходными данными являются измеренные на земной поверхности компоненты электромагнитного поля, трансформированные в частотную область, практически заключается в оптимизации расчета значений соответствующего функционала, связывающего исходные данные с распределением искомых параметров модели среды. Для реализации магнитовариационного подхода был использован следующий функционал

$$F = \sum_{\lambda=1}^L \sum_{\alpha=1}^{MNL} \left\{ \left| \frac{\tilde{H}_{\tilde{x}}^{(\alpha)}}{\gamma_1 \tilde{H}_z^{(\alpha)} + \tilde{H}_{\tilde{x}}^{(\alpha)}} - \frac{H_{\tilde{x}}^{(\alpha)}}{\gamma_1 H_z^{(\alpha)} + H_{\tilde{x}}^{(\alpha)}} \right|^2 + \left| \frac{\tilde{H}_{\tilde{y}}^{(\alpha)}}{\gamma_2 \tilde{H}_z^{(\alpha)} + \tilde{H}_{\tilde{y}}^{(\alpha)}} - \frac{H_{\tilde{y}}^{(\alpha)}}{\gamma_2 H_z^{(\alpha)} + H_{\tilde{y}}^{(\alpha)}} \right|^2 + \right. \\ \left. \left| \frac{\tilde{H}_{\tilde{x}}^{(\alpha)}}{\gamma_3 \tilde{H}_z^{(\alpha)} + \tilde{H}_{\tilde{y}}^{(\alpha)}} - \frac{H_{\tilde{x}}^{(\alpha)}}{\gamma_3 H_z^{(\alpha)} + H_{\tilde{y}}^{(\alpha)}} \right|^2 + \left| \frac{\tilde{H}_{\tilde{y}}^{(\alpha)}}{\gamma_4 \tilde{H}_z^{(\alpha)} + \tilde{H}_{\tilde{x}}^{(\alpha)}} - \frac{H_{\tilde{y}}^{(\alpha)}}{\gamma_4 H_z^{(\alpha)} + H_{\tilde{x}}^{(\alpha)}} \right|^2 \right\},$$

где

$$\tilde{H}_{\tilde{x}}^{(\alpha)} = \frac{k_{\alpha\lambda}}{\omega_{\lambda}\mu} (\tilde{a}_{11}^{\alpha} - \tilde{a}_{12}^{\alpha} - \tilde{a}_7^{\alpha} + \tilde{a}_8^{\alpha}), \quad \tilde{H}_{\tilde{y}}^{(\alpha)} = \frac{k_{\alpha\lambda}}{\omega_{\lambda}\mu} (-\tilde{a}_9^{\alpha} + \tilde{a}_{10}^{\alpha} + \tilde{a}_3^{\alpha} - \tilde{a}_4^{\alpha}), \\ \tilde{H}_z^{(\alpha)} = \frac{k_{\alpha\lambda}}{\omega_{\lambda}\mu} (\tilde{a}_5^{\alpha} - \tilde{a}_6^{\alpha} - \tilde{a}_1^{\alpha} + \tilde{a}_2^{\alpha})$$

Параметры  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$  выбираются экспериментально в зависимости от особенностей модели среды. Суммирование в выражениях для функционала  $F$  проводится по всем элементам ( $\alpha=1,\dots,MNL$ ,  $M, N, L$  – соответственно количество шагов по  $x, y, z$  координатам) и на некотором множестве значений частоты  $\omega_{\lambda}, \lambda=1,\dots, L$ . Верхний индекс у коэффициентов – номер блока, индекс  $(\alpha)$  у

компонент поля означает, что они вычисляются в центре верхней грани блока с этим номером. Причем, величины  $\tilde{a}_3^L$  и  $\tilde{a}_7^L$  не требуется определять явно, поскольку они исчезают при вычислении отношений величин, им пропорциональным в функционале  $F$ . Для расчета  $E_x^{(\alpha)}$ ,  $H_y^{(\alpha)}$ ,  $E_y^{(\alpha)}$ ,  $H_x^{(\alpha)}$  необходимо последовательно решать соответствующую линейную систему, начиная с поверхности первого слоя (сверху вниз, вплоть до слоя с номером  $L-1$ ).

Найденные коэффициенты для одного слоя, определяют правую часть для системы, соответствующей соседнему слою и т.д., рекуррентно для каждого слоя [1]. Применение метода минимизации Хука и Дживса [7] к функционалу  $F$  осуществляется следующим образом. Сначала поиск минимума происходит по всем элементам первого слоя, т.е. по всем координатам-параметрам для этого слоя. Затем происходит переход к следующему слою и т.д. При этом, метод Хука и Дживса применяется в пределах одного слоя и, следовательно, основной составляющей процесса является одномерная минимизация (по элементам слоя).

Самый нижний слой (полупространство) модели будем считать однородным, поэтому можно положить:

$$\tilde{a}_1^L = \tilde{a}_2^L = \tilde{a}_5^L = \tilde{a}_6^L = \tilde{a}_9^L = \tilde{a}_{10}^L = \tilde{a}_{11}^L = \tilde{a}_{12}^L = \tilde{a}_4^L = \tilde{a}_8^L = 0.$$

На границе между последним и предпоследним слоями

$$\tilde{E}_x^{(L-1)} = \tilde{a}_3^L, \quad \tilde{E}_y^{(L-1)} = \tilde{a}_7^L, \quad \tilde{H}_x^{(L-1)} = k_L \tilde{a}_7^L, \quad \tilde{H}_y^{(L-1)} = k_L \tilde{a}_3^L,$$

на остальных границах при  $j=L-2, \dots, 1$

$$\tilde{E}_x^{(j)} = \tilde{E}_x^{(j+1)}, \quad \tilde{E}_y^{(j)} = \tilde{E}_y^{(j+1)}, \quad \tilde{H}_x^{(j)} = \tilde{H}_x^{(j)}, \quad \tilde{H}_y^{(j)} = \tilde{H}_y^{(j+1)}.$$

Пересчет коэффициентов от нижнего слоя к верхнему слою происходит путем решения на каждом шаге соответствующей линейной системы.

Таким образом, оптимизация решения обратной трехмерной задачи, обусловленная затратами на вычисление функционала в процессе минимизации, сводится к последовательности решений прямых задач для отдельных слоев модели и, при этом, не нужно решать трехмерную прямую задачу для всей области.

Работа выполнена при поддержке Академии Финляндии - российско-финский проект №13.

1. Егоров И.В. Метод Треффца для решения трехмерных прямых и обратных задач геоэлектрики // Физика Земли. 2011. № 2. С. 15-26.
2. Никольский В.В., Никольская Т.И. Декомпозиционный подход в задачах электродинамики. М.: Наука. 1983. 252 с.
3. Ильин В.П. Об итерационном методе Качмажа и его обобщениях// Сиб. журн. индустр. математики. 2006. Т. 9, № 3. С. 39-49.
4. T. Strohmer and R.Vershynin. A randomized Kaczmarz algorithm with exponential convergence . Journal of Fourier Analysis and Applications. 2009. V. 15:1, P. 262-278.
5. W. B. Johnson and J. Lindenstrauss. Extensions of Lipschitz mappings into a Hilbert space. Conf. In Modern Analysis and Probability, pages 189–206, 1984.
6. Y. C. Eldar and D. Needell. "Acceleration of Randomized Kaczmarz Method via the Johnson-Lindenstrauss Lemma. Numerical Algorithms, 2011. V. 58, no. 2, pp.163-177.
7. Базара М., Шетти К. Нелинейное программирование. Теория и алгоритмы. М.: Мир. 1982. 583 с.