Секция №1, устный
УДК 550.837

О ЗАДАЧЕ ПРОДОЛЖЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Губатенко В.П.[1]

[1] – Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского

Сформулирована обратная задача электроразведки переменными токами для модели изотропной частотно-дисперсной геологической среды. Доказана возможность редукции этой задачи к задаче продолжения электромагнитного поля вглубь земли. Приведен пример не единственности решения одномерной обратной задачи для случая немагнитной среды с частотно-дисперсной проводимостью. Для устранения такой неоднозначности необходимо использовать априорную информацию о законе частотной дисперсии проводимости.

Ключевые слова: обратная задача, электроразведка, частотно-дисперсные среды, продолжение электромагнитного поля

Поставим несколько обратных задач электроразведки для модели изотропной геологической среды, характеризуемой проводимость σ и магнитной проницаемостью μ. Рассмотрим формулировку этих задач в частотной области в предположении, что параметры геологической среды σ и μ обладают частотной дисперсией.

Обратная задача 1

Пусть x, y, z – прямоугольные декартовы координаты в трехмерном евклидовом пространстве R^3. Будем искать коэффициенты σ и μ уравнений Максвелла

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \sigma\mathbf{E}\ , \tag{1}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = i\omega\mu\ \mathbf{H} \tag{2}$$

в области $V = \{M(x,y,z) \in R^3 \mid z > 0\}$ (в земле), где $\mathbf{E} = \mathbf{E}(M,i\omega) = \mathbf{E}(x,y,z,i\omega) = (E_x, E_y, E_z)$ и $\mathbf{H} = \mathbf{H}(M,i\omega) = \mathbf{H}(x,y,z,i\omega) = (H_x, H_y, H_z)$ – соответственно комплексные амплитуды напряженностей электрического и магнитного полей в земле; i – мнимая единица; ω – круговая частота.

Пусть неизвестные параметры $\sigma = \sigma(x,y,z,i\omega)$ и $\mu = \mu(x,y,z,i\omega)$ удовлетворяют условиям

$$\sigma(M,i\omega) \neq 0,\ \mu(M,i\omega) \neq 0, \tag{3}$$

$$\operatorname{Re}\sigma(M,i\omega) \geq 0,\ \operatorname{Im}\mu(M,i\omega) \leq 0, \tag{4}$$

$$\sigma(M,i\omega) \in C^{k-1}(V),\ \mu(M,i\omega) \in C^{k-1}(V),\ k \geq 3. \tag{5}$$

Условия (3) и (4) выражают физическую реализуемость параметров среды [1], а (5) есть условие их гладкости.

Так как параметры среды доступны измерениям на поверхности земли $z = +0$, то будем их считать известными на этой поверхности:

$$\sigma = \sigma^0(x,y,+0,i\omega), \qquad \mu = \mu^0(x,y,+0,i\omega). \tag{6}$$

Предположим так же, что на поверхности $z = +0$ известны векторы поля

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^0(x,y,+0,i\omega), \qquad \mathbf{H} = \mathbf{H}^0(x,y,+0,i\omega), \tag{7}$$

где $\mathbf{E} = \mathbf{E}^0(x,y,+0,i\omega) = (E_x^0, E_y^0, E_z^0)$, $\mathbf{H} = \mathbf{H}^0(x,y,+0,i\omega) = (H_x^0, H_y^0, H_z^0)$. Тогда уравнения (1) и (2) на поверхности $z = +0$ имеют вид

$$\left.\frac{\partial H_z^0}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z}\right|_{z=+0} = \sigma^0 E_x^0,\quad \left.\frac{\partial H_x}{\partial z}\right|_{z=+0} - \frac{\partial H_z^0}{\partial x} = \sigma^0 E_y^0,\quad \frac{\partial H_y^0}{\partial x} - \frac{\partial H_x^0}{\partial y} = \sigma^0 E_z^0, \tag{8}$$

$$\left.\frac{\partial E_z^0}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right|_{z=+0} = i\omega\mu^0 H_x^0,\quad \left.\frac{\partial E_x}{\partial z}\right|_{z=+0} - \frac{\partial E_z^0}{\partial x} = i\omega\mu^0 H_y^0,\quad \frac{\partial E_y^0}{\partial x} - \frac{\partial E_x^0}{\partial y} = i\omega\mu^0 H_z^0, \tag{9}$$

где $\left.\frac{\partial E_x}{\partial z}\right|_{z=+0}$, $\left.\frac{\partial E_y}{\partial z}\right|_{z=+0}$, $\left.\frac{\partial H_x}{\partial z}\right|_{z=+0}$, $\left.\frac{\partial H_y}{\partial z}\right|_{z=+0}$ – частные производные компонент электромагнитного поля по координате z на поверхности $z=+0$.

Соотношения (6)–(9) являются граничными условиями обратной задачи. Вместе с тем, видим, что фигурирующие в них функции являются зависимыми. Например, если $E_z^0 \neq 0$, то в качестве независимых функций могут быть выбраны $\mu=\mu^0(x,y,+0,i\omega)$, E_x^0, E_y^0, E_z^0, $\left.\frac{\partial E_x}{\partial z}\right|_{z=+0}$ и $\left.\frac{\partial E_y}{\partial z}\right|_{z=+0}$. В этом случае функции H_x^0, H_y^0, H_z^0 определяются соотношениями (9). Тогда $\sigma=\sigma^0(x,y,+0,i\omega)$ находится из последнего равенства условий (8) а функции $\left.\frac{\partial H_x}{\partial z}\right|_{z=+0}$, $\left.\frac{\partial H_y}{\partial z}\right|_{z=+0}$ определяются из первого и второго равенств тех же условий. Следовательно, граничные условия обратной задачи принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} &\mu=\mu^0(x,y,+0,i\omega), && E_x=E_x^0(x,y,+0,i\omega), && E_y=E_y^0(x,y,+0,i\omega),\\ &E_z=E_z^0(x,y,+0,i\omega), && \left.\frac{\partial E_x}{\partial z}\right|_{z=+0}=\varphi(x,y,+0,i\omega), && \left.\frac{\partial E_y}{\partial z}\right|_{z=+0}=\psi(x,y,+0,i\omega), \end{aligned} \tag{10}$$

где функции в правых частях этих равенств известны. Если же $E_z^0=0$, то к граничным условиям (10) добавим

$$\sigma=\sigma^0(x,y,+0,i\omega).$$

Заметим, что из уравнений (1), (2) и условий (4), (5) вытекает

$$\mathbf{E}(M,i\omega)\in C^k(V),\ \mathbf{H}(M,i\omega)\in C^k(V), \tag{11}$$

$$\lim_{z\to+\infty}\mathbf{E}(M,i\omega)=0,\ \lim_{z\to+\infty}\mathbf{H}(M,i\omega)=0. \tag{12}$$

Как следует из постановки обратной задачи, ее решение существует. Очевидно, что если найдено какое-либо решение $\sigma=\tilde{\sigma}(x,y,z,i\omega)$, $\mu=\tilde{\mu}(x,y,z,i\omega)$ этой задачи, то для этих параметров существует однозначное решение уравнений Максвелла (1) и (2) относительно векторных полей $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$. Возникает следующий вопрос: можем ли мы редуцировать эту обратную задачу к нахождению векторного поля $\mathbf{E}$? Чтобы ответить на этот вопрос поставим следующую обратную задачу.

Обратная задача 2

Пусть скалярные функции σ, μ и векторные поля $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ удовлетворяют условиям (3), (5) and (11),(12), и в то же время эти векторные поля не равны тождественно нулю в области V. Поставим следующую обратную задачу:

Предположим, что в области V задано векторное поле $\mathbf{E}$. Найти в этой области скалярные функции σ,μ и вектор $\mathbf{H}$, обращающие соотношения (1) и (2)в тождества.

Аналогичная задача может быть рассмотрена для заданного вектора $\mathbf{H}$ и неизвестных функций σ, μ, $\mathbf{E}$. Однако мы не будем рассматривать ее отдельно, принимая во внимание симметрию (1) и (2) по отношению к формальной замене $\mathbf{E}\leftrightarrow\mathbf{H}$, $i\omega\mu\leftrightarrow\sigma$, называемой принципом перестановочной двойственности [2].

Лемма 1. Решение 2-й обратной задачи существует тогда и только тогда, когда неизвестная скалярная функция μ есть решение уравнения

$$\mathbf{E}\times\operatorname{rot}\left(\frac{1}{\mu}\operatorname{rot}\mathbf{E}\right)=0 \tag{13}$$

за исключением решений μ уравнения

$$\operatorname{rot}\left(\frac{1}{\mu}\operatorname{rot}\mathbf{E}\right)=0. \tag{14}$$

Замечание к лемме 1. Если μ есть решение уравнения (14), то искомый вектор $\mathbf{H}$ тождественно равен нулю.

ЛЕММА 2. Если для заданного вектора $\mathbf{E}$ существует решение 2-й обратной задачи, то в каждой точке $M \in V$ или

$$\left(\mathbf{E}(M), \operatorname{rot}\mathbf{E}(M)\right) = 0,\ \left(\operatorname{rot}\mathbf{E}(M), \operatorname{rot}\ \operatorname{rot}\mathbf{E}(M)\right) = 0,$$

или

$$\left(\mathbf{E}(M), \operatorname{rot}\mathbf{E}(M)\right) \neq 0,\ \left(\operatorname{rot}\mathbf{E}(M), \operatorname{rot}\ \operatorname{rot}\mathbf{E}(M)\right) \neq 0.$$

Замечание к лемме 2. Если $(\mathbf{E}, \operatorname{rot}\mathbf{E}) \neq 0$, $(\operatorname{rot}\mathbf{E}, \operatorname{rot}\ \operatorname{rot}\mathbf{E}) \neq 0$ в некоторой точке $M \in V$, то в силу непрерывности скалярных функций $(\mathbf{E}, \operatorname{rot}\mathbf{E})$ и $(\operatorname{rot}\mathbf{E}, \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E})$ существует окрестность этой точки, в которой справедливы данные неравенства. Следовательно, задавая вектор $\mathbf{E}$ во 2-й обратной задаче, можно рассмотреть два случая: или $(\mathbf{E}, \operatorname{rot}\mathbf{E}) \equiv 0$, $(\operatorname{rot}\mathbf{E}, \operatorname{rot}\ \operatorname{rot}\mathbf{E}) \equiv 0$ в области V, или $(\mathbf{E}, \operatorname{rot}\mathbf{E})$, $(\operatorname{rot}\mathbf{E}, \operatorname{rot}\ \operatorname{rot}\mathbf{E})$ не равны тождественно нулю в любой подобласти области V. Первому случаю соответствуют ортогональные векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$, а второму – не ортогональные. Первый случай включает, например, трехкомпонентные плоские и осесимметричные электромагнитные поля, а второй – пятикомпонентные поперечно-электрические и поперечно-магнитные поля [3].

ТЕОРЕМА 1. Если векторное поле $\mathbf{E}$ есть решение уравнений

$$(\mathbf{E}, \operatorname{rot}\mathbf{E}) = 0,\ (\operatorname{rot}\mathbf{E}, \operatorname{rot}\ \operatorname{rot}\mathbf{E}) = 0, \tag{15}$$

то для заданного вектора $\mathbf{E}$ решение 2-й обратной задачи существует и не единственно.

Доказательство этой теоремы основано на теории линейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка [4]. После нахождения всех решений уравнения (13) и удаления из них решений уравнения (14) можем определить функции σ и $\mathbf{H}$ соотношениями

$$\sigma = \frac{1}{i\omega\mathbf{E}^2}\left(\mathbf{E}, \operatorname{rot}\left(\frac{1}{\mu}\operatorname{rot}\mathbf{E}\right)\right),\quad \mathbf{H} = \frac{1}{i\omega\mu}\operatorname{rot}\mathbf{E}. \tag{16}$$

Заметим здесь, что первое равенство в (16) определяется из соотношения

$$\operatorname{rot}\left(\frac{1}{\mu}\operatorname{rot}\mathbf{E}\right) = i\omega\sigma\mathbf{E}. \tag{17}$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть вектор $\mathbf{E}$ задан в области V и $(\mathbf{E}, \operatorname{rot}\mathbf{E}) \neq 0$, $(\operatorname{rot}\mathbf{E}, \operatorname{rot}\ \operatorname{rot}\mathbf{E}) \neq 0$ в этой области. Для существования решения 2-й обратной задачи необходимо и достаточно, чтобы вектор $\mathbf{E}$ являлся решением уравнения

$$\operatorname{rot}\mathbf{F}^E = 0, \tag{18}$$

где $\mathbf{F}^E = \dfrac{1}{(\operatorname{rot}\mathbf{E}, \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E})}\operatorname{div}\left[\dfrac{(\operatorname{rot}\mathbf{E}, \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E})}{(\mathbf{E}, \operatorname{rot}\mathbf{E})}\mathbf{E}\right]\operatorname{rot}\mathbf{E} + \dfrac{1}{(\mathbf{E}, \operatorname{rot}\mathbf{E})}(\mathbf{E} \times \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E})$.

При выполнении условий этой теоремы общее решение μ 2-й обратной задачи имеет вид

$$\mu = \mu_0(i\omega)\exp\left(\int_{M_0}^{M} F_x^{\mathrm{E}}dx + F_y^{\mathrm{E}}dy + F_z^{\mathrm{E}}dz\right), \tag{19}$$

где $\mathbf{F}^E = \left(F_x^E, F_y^E, F_z^E\right)$; $M(x, y, z) \in V$, $M_0(x_0, y_0, z_0) \in V$; функция $\mu_0(i\omega)$ есть произвольная функция частоты ω, но не зависит от координат x, y, z. Проводимость σ и вектор напряженность $\mathbf{H}$ определяются формулами (16). Рассмотри следующую обратную задачу.

Обратная задача 3

Как следует из теорем 1 и 2, векторное поле $\mathbf{E}$ порождает семейство функций $\{\mathbf{E}, \mathbf{H}, \mu, \sigma\}$, обращающее уравнения (1) и (2) в тождества тогда и только тогда, когда $\mathbf{E}$ удовлетворяет уравнениям (15) или уравнению (18). Множество таких векторных полей $\mathbf{E}$ определяет всевозможные параметры среды σ и μ, в том числе подчиняющиеся условиям физической реализуемости (4). Для единственного восстановления параметров среды, в соответствии с теоремами 1 и 2 необходима априорная информация о распределении магнитной проницаемости μ в области V.

Предположим, например, здесь и далее, что $\mu=\mu_0=4\pi\cdot10^{-7}$ Гн/м. Такое условие выполняется для подавляющего числа горных пород. В этом случае как для ортогональных полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$, так и для не ортогональных, вектор $\mathbf{E}$ должен быть решением уравнения

$$\mathbf{E}\times\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E}=0. \tag{20}$$

Тогда 1-я обратная задача редуцируется к следующей задаче:

Обратная задача 3.1. *Найти решение* $\mathbf{E}$ *уравнения (20), удовлетворяющее граничным условиям*

$$\begin{gathered} E_x=E_x^0(x,y,+0,i\omega), \qquad E_y=E_y^0(x,y,+0,i\omega), \\ E_z=E_z^0(x,y,+0,i\omega)\neq0, \qquad \left.\frac{\partial E_x}{\partial z}\right|_{z=+0}=\varphi(x,y,+0,i\omega), \qquad \left.\frac{\partial E_y}{\partial z}\right|_{z=+0}=\psi(x,y,+0,i\omega), \end{gathered} \tag{21}$$

или, в случае $E_z=0$*, условиям*

$$\begin{gathered} \sigma=\sigma^0(x,y,+0,i\omega), \qquad E_x=E_x^0(x,y,+0,i\omega), \qquad E_y=E_y^0(x,y,+0,i\omega), \\ \left.\frac{\partial E_x}{\partial z}\right|_{z=+0}=\varphi(x,y,+0,i\omega), \qquad \left.\frac{\partial E_y}{\partial z}\right|_{z=+0}=\psi(x,y,+0,i\omega). \end{gathered} \tag{22}$$

Если 1-я обратная задача имеет единственное решение, то и напряженность $\mathbf{E}$ определяется однозначно из задачи 3.1. Имея решение $\mathbf{E}$ обратной задачи 3.1, функции σ и $\mathbf{H}$ определяются по формулам (16).

Покажем на простой классической модели магнитотеллурических зондирований, что решение как обратной задачи 1 так и задачи 3.1 не единственно в случае частотной дисперсии проводимости. Предположим, что в области V расположена немагнитная среда ($\mu=\mu_0=4\pi\cdot10^{-7}$) с проводимостью $\sigma=\sigma(z,i\omega)$, и пусть возбуждается электромагнитное поле $\mathbf{E}=(E_x(z,i\omega),0,0)$, $\mathbf{H}=(0,H_y(z,i\omega),0)$ с ортогональными векторами $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$. Тогда в области V уравнение (20) (или уравнение (17)) имеет вид

$$\frac{d^2E_x}{dz^2}+i\omega\mu_0\sigma E_x=0. \tag{23}$$

Зададим граничные условия (22) равенствами

$$\sigma^0(+0,i\omega)=\sigma_0, \qquad E_x=E^0(i\omega), \qquad \left.\frac{dE_x}{dz}\right|_{z=+0}=\varphi(i\omega)=-\sqrt{-i\omega\mu_0\sigma_0}\,E^0(i\omega), \tag{24}$$

где $\sigma_0=\mathrm{const}>0$; $\operatorname{Re}\sqrt{-i\omega\mu_0}>0$; $E^0(i\omega)$ – произвольная комплексная функция круговой частоты ω. Легко показать, что как

$$\sigma=\sigma_0, \qquad E_x=E^0(i\omega)\exp(-k_0\,z) \tag{25}$$

так и

$$\begin{gathered} \sigma=-\frac{1}{i\omega\mu_0}\,\frac{k_0^2+k_1(k_1-k_0)(2k_0-k_1)z+\dfrac{k_1(k_1-k_0)^2}{2}z^2}{1+(k_1-k_0)z+\dfrac{(k_1-k_0)^2}{2}z^2}, \\ E_x=E^0(i\omega)\left[1+(k_1-k_0)z+\frac{(k_1-k_0)^2}{2}z^2\right]\exp(-k_1z), \end{gathered} \tag{26}$$

где $k_0=\sqrt{-i\omega\mu_0\sigma_0}$; $k_1=\sqrt{-i\omega\mu_0\sigma_1}$, $\sigma_1=\mathrm{const}$, $\sigma_0<\sigma_1<4\sigma_0$, являются решениями задач 1 и 3.1.

Решению (25) соответствует квазистационарное поле в однородном полупространстве с проводимостью $\sigma=\sigma_0$, а решению (26) – физически реализуемая градиентная частотно-дисперсная среда ($\operatorname{Re}\sigma>0$, $\operatorname{Im}\sigma<0$ для всех $\omega>0$). Оба решения не противоречат теореме единственности [5], в которой не предполагалась частотная дисперсия проводимости σ.

Этот показывает, что для нахождения единственного решения обратной задачи необходимо привлечь дополнительную априорную информацию о природе частотной дисперсии. Если, например, известно, что σ не зависит от ω, то можно предложить метод [6-9], примененный для обратной задачи акустики. В самом деле, так как проводимость σ определяется формулой (16) и не зависит от круговой частоты ω, то

$$\frac{\partial}{\partial\omega}\left[\frac{1}{\omega\mathbf{E}^2}\left(\mathbf{E}, \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{E}\right)\right]=0, \tag{27}$$

и можно поставить следующую обратную задачу:

Обратная задача 3.2. Найти решение $\mathbf{E}$ системы уравнений (20), (27), удовлетворяющее граничным условиям (21) в случае $E_z \neq 0$ или условиям (22) если $E_z = 0$.

Решение этой задачи существует и единственно, по крайней мере, для одномерной задачи магнитотеллурики. Если решение задачи 3.2 найдено, то σ и $\mathbf{H}$ вычисляются по формулам (16)

Автор благодарит Российский фонд фундаментальных исследований за финансовую поддержку гранта 10-05-00 753-а, а также Swedish Institute, Visby Program.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука.1982.
2. Гольдштейн Л.Д., Зернов Н.В. Электромагнитные поля и волны. М.: «Советское радио». 1971.
3. Светов Б.С., Губатенко В.П. Аналитические решения электродинамических задач. М.:Наука.1988.
4. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука. 1969.
5. Тихонов А.Н. К математическому обоснованию теории электромагнитных зондирований // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1965. Т.5. №3. С. 545-547.
6. Beilina L. and Klibanov M.V. A globally convergent numerical method for a coefficient inverse problem, SIAM J. Sci. Comp., 31, 478-509, 2008.
7. Beilina L. and Klibanov M.V. Synthesis of global convergence and adaptivity for a hyperbolic coefficient inverse problem in 3D, J. Inverse and Ill-posed Problems, 18, 85-132, 2010.
8. Beilina L. and Klibanov M.V. Reconstruction of dielectrics from experimental data via a hybrid globally convergent/adaptive inverse algorithm, Inverse Problems, 26, 125009, 2010.
9. Beilina L. and Klibanov M.V. Approximate global convergence and adaptivity for Coefficient Inverse Problems, Springer, New-York, 2012.