

ЭМЗ - 2013

Анализ алгоритмов решения обратных коэффициентных задач геоэлектрики на постоянном токе

Кутищева А.Ю.
(ИНГГ СО РАН)

Научный руководитель д.т.н., профессор
Шурина Э.П.

Классификация обратных задач

- Эволюционные обратные задачи (нестационарная задача);
- Граничные обратные задачи;
- Коэффициентные обратные задачи;
- Геометрические обратные задачи;
- Идентификация правой части.

Коэффициентные обратные задачи

Основные работы

- *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. – М.: Наука – 1979 – 288 с.
- Haber E., Ascher U.M., Oldenburg D. On optimization techniques for solving nonlinear inverse problems. // *Inverse Problems* -2000. – V.16, № 5. – p. 1263-1280

Постановка обратной задачи

Рассмотрим обратную задачу в области:

$$\Omega = \bigcup_{i=0}^N \Omega_i \quad \partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$$

$$A(m)U = f \quad (1)$$

$A(m)$ – оператор решения прямой задачи

U – вектор решения

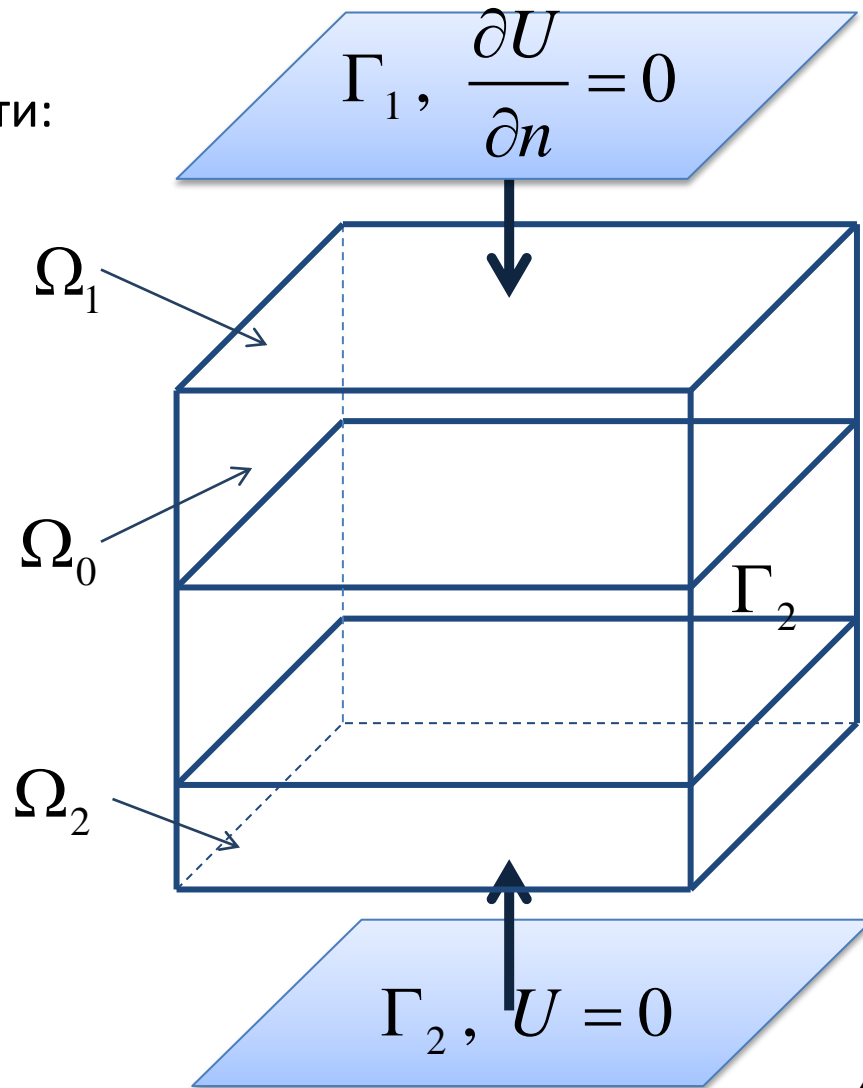
f – правая часть

m – функция проводимости среды

Модель наблюдения имеет вид:

$$b = Q[m] + \varepsilon \quad (2)$$

b – показания датчиков



Минимизация с ограничениями

Задачу поиска неизвестных параметров m сформулируем, как задачу минимизации с ограничениями:

$$\phi(m, U) = \frac{1}{2} \|Q[m] - b\|^2 + \frac{\beta}{2} \|W(m - m_0)\|, \quad (3)$$

при условии $A(m)U = f$

W – некоторый регуляризирующий оператор

β – коэффициент регуляризации

m_0 – начальные значения вектора параметров

$Q[m]$ – оператор, проектирующий пространство решений на пространство датчиков

Условие существования решения

- Вычисленное поле U должно отличаться от данных измерений незначительно:

$$\phi_d = \|QU - b\|^2 \leq \gamma_1;$$

- функция штрафа на решении должна быть ограничена:

$$\phi_\beta = \|W(m - m_0)\|^2;$$

- определяемые значения коэффициента электропроводности и распределение скалярного потенциала U должны удовлетворять операторному уравнению (соответствующему прямой задаче)

$$A(m)U = f.$$

Метод Гаусса-Ньютона

Вычислительный алгоритм:

1. Задается начальное значение $m^{(0)}$.
2. Вычисляется $U^{(0)}(m^{(0)})$, как решение прямой задачи $A(m_0)U = f$
For $i=1,2... do$

i.1. Вычисляется приращение δm по формуле:

$$\left(\beta W^T W + G^T (A^{-1})^T Q^T Q A^{-1} G \right) \delta m = \\ - \beta W^T W (m - m_0) - G^T (A^{-1})^T Q^T (b - Q A^{-1} - f)$$

i.2. Вычисляется $m^{(i+1)} = m^{(i)} + \delta m$.

i.3. Вычисляется $U^{(i+1)}(m^{(i+1)})$, как решение прямой задачи

$$A(m^{(i+1)})U = f$$

i.4. Проверка критерия останова.

Метод сопряженных направлений

Вычислительный алгоритм:

1. Задается начальное значение $m^{(0)}$
2. Вычисляется $S^{(0)} = -\phi'_m(m, U)$

For $i=1,2\dots$ *do*

- i.1. Вычисляется направление $\alpha^{(i+1)}$ по формуле:

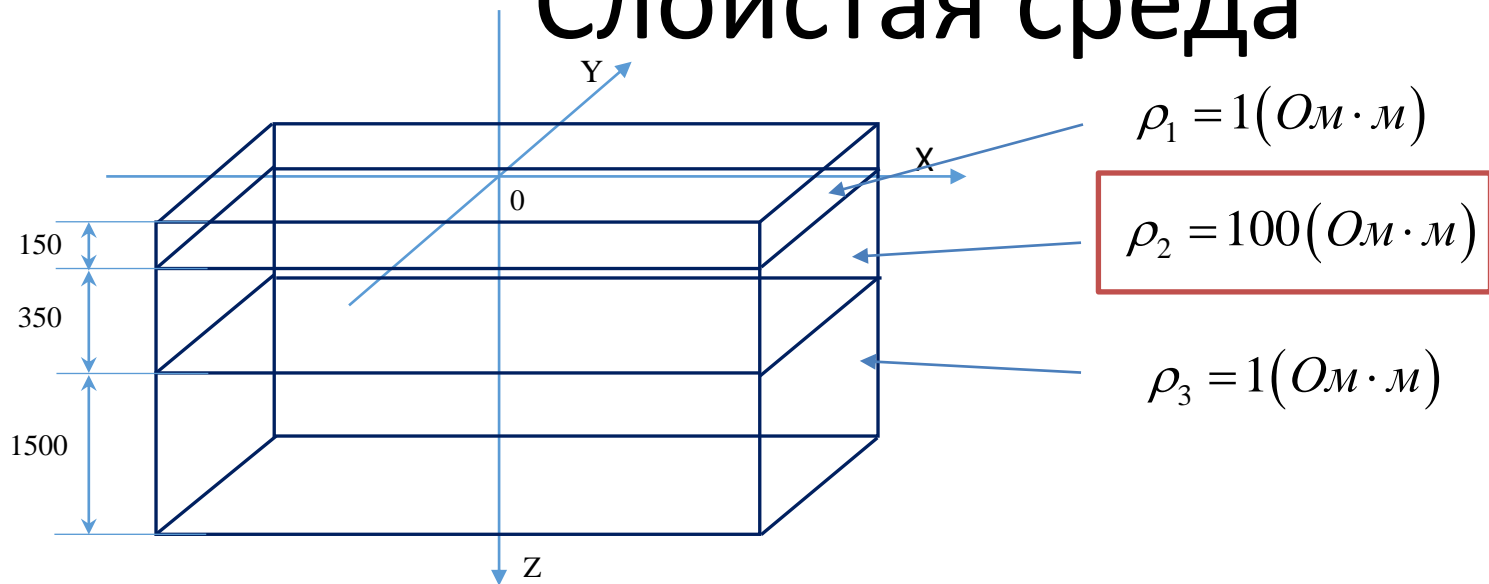
$$\alpha^{(i)} = \frac{\left(QA^{-1}f - b, -QA^{-1}GS^{(i)} \right) + \beta \left(W(m - m_0), WS^{(i)} \right)}{\left(QA^{-1}GS^{(i)}, QA^{-1}GS^{(i)} \right) + \beta \left(WS^{(i)}, WS^{(i)} \right)}$$

- i.2. Вычисляется $m^{(i+1)} = m^{(i)} + \alpha^{(i)} S^{(i)}$.

- i.3. Вычисляется $S^{(i+1)} = -\phi'_m(m^{(i+1)}, U) + \frac{\left\| \phi'_m(m^{(i+1)}, U) \right\|^2}{\left\| \phi'_m(m^{(i)}, U) \right\|^2} S^{(i)}$

- i.4. Проверка критерия останова.

Слоистая среда

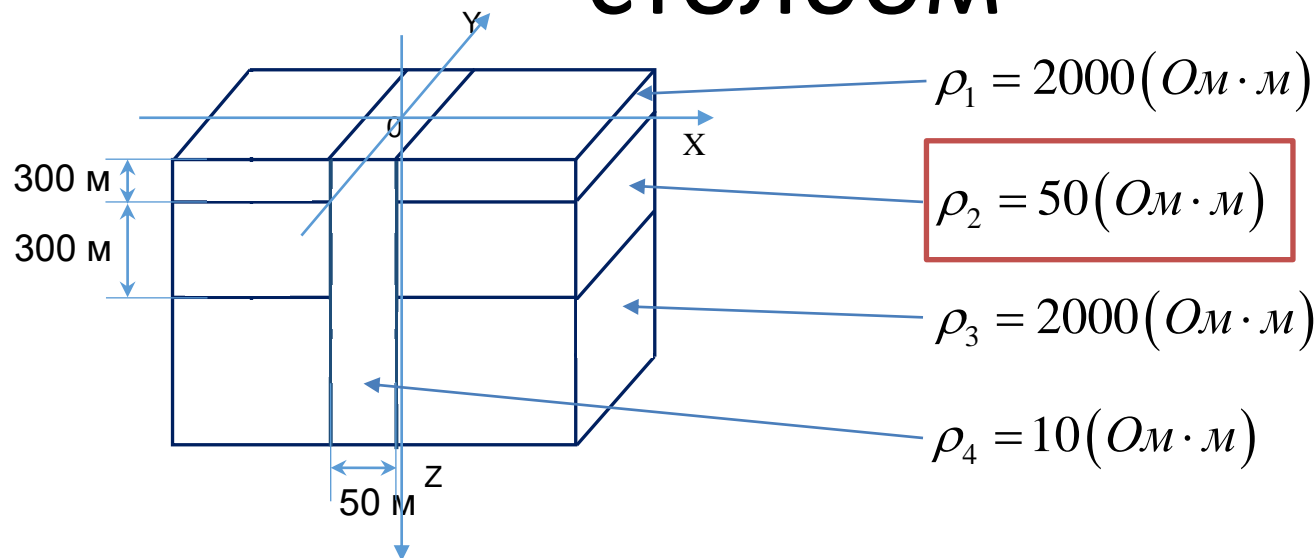


Метод минимизации функционала	Начальное приближение (Ом*м)	Количество итераций	Полученное сопротивление (Ом*м)	Среднеквадратическое отклонение
Гаусса-Ньютона	10^3	3	91.57509	8.42491
	10^4	2	99.70089	0.29911
Флетчера-Ривса	10^3	2	92.85051	7.14949
	10^4	2	92.3361	7.66390
Комбинированный	10^3	3	100.8064	0.8064
	10^4	3	100.7049	0.7049

Слоистая среда

Величина шума (%)	Начальное приближение	10^3 Ом*м		10^4 Ом*м	
	Метод минимизации функционала	Гаусс-Ньютон	Комбинированный	Гаусс-Ньютон	Комбинированный
5%	Полученное сопротивление (Ом*м)	122.25	90.23	73.13	84.85
	Среднее кол-во итераций	5	5	7	6
10%	Полученное сопротивление (Ом*м)	67.90	75.97	66.23	74.45
	Среднее кол-во итераций	6	5	6	6

Слоистая среда с вертикальным столбом



Метод минимизации функционала	Величина шума(%)	Количество итераций	Полученное сопротивление (Ом*м)	Среднеквадратическое отклонение
Комбинированный	0%	3	50.0003	0.0003
	5%	3	46.4314	3.5686

Заключение

- Разработаны и реализованы вычислительные схемы для решения обратных коэффициентных задач.
- Комбинированный (основанный на методах Гаусса-Ньютона и Флетчера-Ривса) метод минимизации функционала позволяет получить решение с большей точностью и за меньшее время.
- Программы протестирована на нескольких модельных задачах.
- Разработана и реализована параллельная версия алгоритма.